

Table des matières

1	Statique	2
1.1	Force et moment	2
1.1.1	Force	2
1.1.2	Moment	3
1.2	Les principales liaisons employées dans le bâtiment.....	5
1.2.1	Les degrés de liberté dans le plan.....	5
1.2.2	La liaison appuis plan.....	6
1.2.3	La liaison pivot.....	7
1.2.4	La liaison encastrement.....	8
1.3	Application du Principe Fondamental de la Statique (PFS) dans le plan (xoy)	8
1.3.1	Poutre sur deux appuis en console avec une charge uniformément répartie	9
1.3.2	Poutre sur deux appuis en console (avec un porte à faux) avec une charge ponctuelle et une charge uniformément répartie.....	12
1.3.3	Chevron-arbalétrier avec un porte à faux	14
1.3.4	Structure triangulée : cas du treillis.....	16
1.3.5	Structure triangulée : portiques à trois articulations.....	23

1 Statique

1.1 Force et moment

Il existe plusieurs types de forces, celles provoquées par la gravité et les efforts provenant de la liaison entre des pièces. Par ailleurs une force possède quatre propriétés.

Une autre grandeur importante à maîtriser, le moment. Il existe de nombreuses applications qui exploitent cette propriété telle que la balance romaine par exemple. Elle n'est plus en rotation lorsque les poids équilibrent les éléments.

1.1.1 Force

Dans le bâtiment, de nombreux efforts sont provoqués par la gravité, comme le poids de la structure, la charge de neige et les actions provoquées par l'exploitation du bâtiment (poids des meubles, des usagers...). Il existe d'autres types de forces, comme le vent qui exerce un effort perpendiculaire à la paroi car c'est une pression. Par ailleurs un élément reçoit des forces provenant d'autres pièces. Par exemple, une porteuse reçoit une force provenant d'un poteau sur laquelle elle repose.

Le principe des actions mutuelles (PAM)

Reprenons l'exemple de la porteuse posée sur un poteau. Il reçoit un effort dirigé vers le bas provoqué par la porteuse et celle-ci reçoit un effort de même valeur mais dirigé vers le haut. L'action de la porteuse sur le poteau est l'inverse de l'action du poteau sur la porteuse (Figure B1).

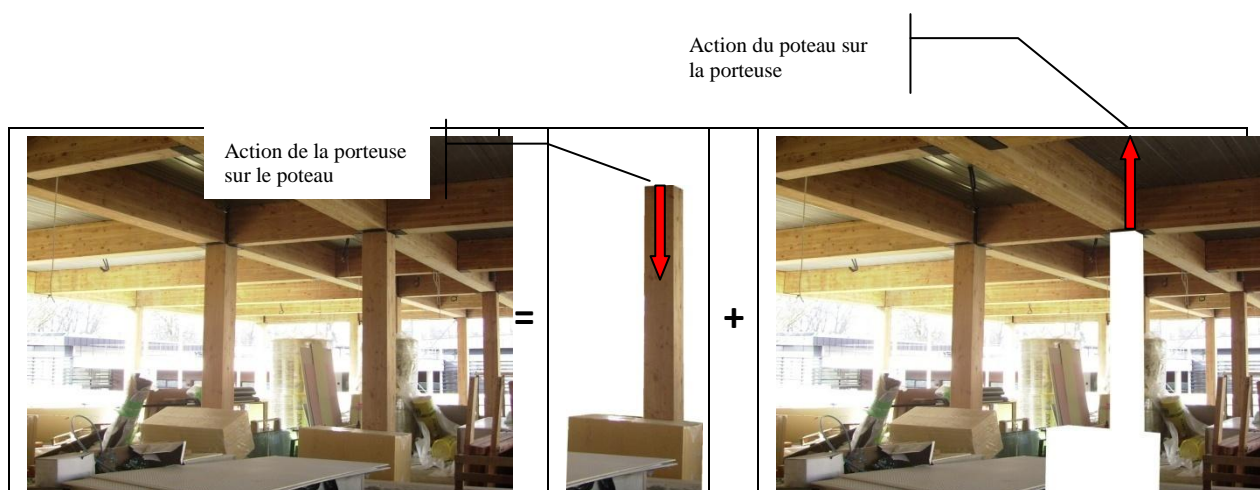


Figure B1 : Le principe des actions mutuelles (PAM) : le poteau reçoit un effort vertical dirigé vers le bas provoqué par la porteuse et la porteuse reçoit un effort vertical dirigé vers le haut provoqué par le poteau (@ Cosylva)

Calcul de la valeur d'une force provoqué par la gravité

Une force s'exprime en Newton (N) ou en Kilo Newton (kN). Pour obtenir la valeur de cet effort, il faut multiplier la masse par l'accélération terrestre g , soit :

$$\text{Force} = \text{masse} \times \text{accélération}$$

$$N = kg \times g, \text{ avec } g = 10\text{m/s}^2$$

Caractérisation d'une force

Une force est caractérisée par une intensité (sa valeur en Newton), une direction (exemple, verticale si elle est provoquée par la gravité), un sens (exemple, vers le bas, cas de la gravité) et un point d'application (exemple, contact entre la porteuse et le poteau). Elle est modélisée par un vecteur (figure B2).

Remarque : Le « point d'application » du poids d'un objet est son centre de gravité.

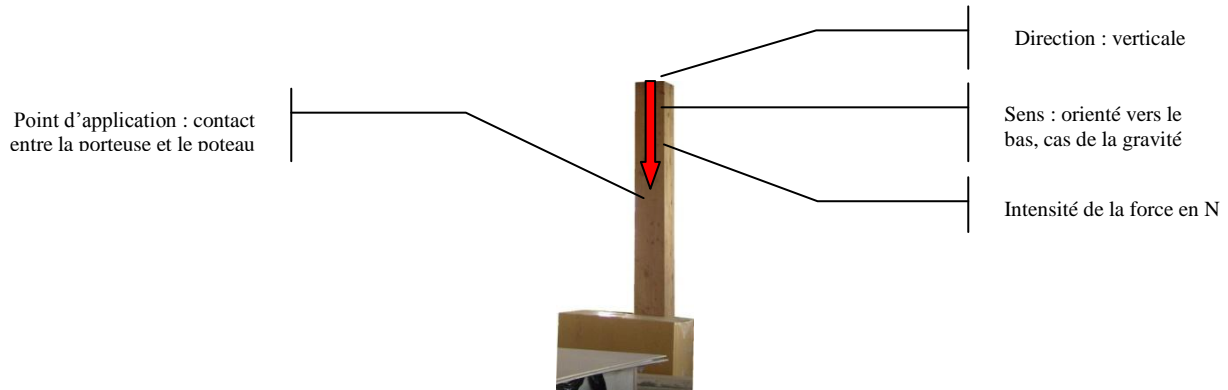


Figure B2 : Caractérisation d'une force (@ Cosylva)

Projection d'une force

Pour simplifier des calculs de moments ou pour réaliser une étude statique, il peut être intéressant de projeter un effort sur les axes x et y (Cf. figure B2 bis). Pour notre exemple, le calcul des valeurs de F_x et F_y sont :

- $F_x = F \times \cos(\alpha)$,
- $F_y = F \times \sin(\alpha)$

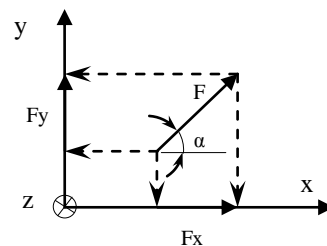


Figure B2 bis : Projection d'une force sur les axes

1.1.2 Moment

Le moment d'une force par rapport à un point traduit l'aptitude d'une force à faire tourner un système mécanique autour de ce point (centre de rotation). Il s'exprime en N.m (newton-mètre). Par exemple, l'emploi d'une clé pour visser un écrou (figure B3).

Calcul de la valeur d'un moment

Un moment s'exprime en Newton * mètre (N.m). Pour obtenir la valeur de cet effort, il faut multiplier la force par la distance la plus courte entre la ligne supportant la force et le centre de rotation. Cette distance est obtenue en mesurant la distance entre le centre de rotation et l'intersection entre la ligne supportant la force et une droite perpendiculaire à cette ligne passant par le centre de rotation.

$$M_A(F) = F \times d$$

Avec

- F en Newton (N),
- d en mètre (m),
- A : le point représentant le centre de rotation.

Reprenons l'exemple de l'écrou vissé avec une clé (figure B3). Lorsqu'on exerce un effort de 100 N avec une distance de 0,3 m, le moment sera de :

$$M_A(F) = F \times d = 100 \times 0,3 = 30 \text{ N.m}$$

Remarque : par convention, lorsque le sens de rotation du système est identique au sens de rotation trigonométrique, le moment est positif. Le cas contraire, il est négatif.

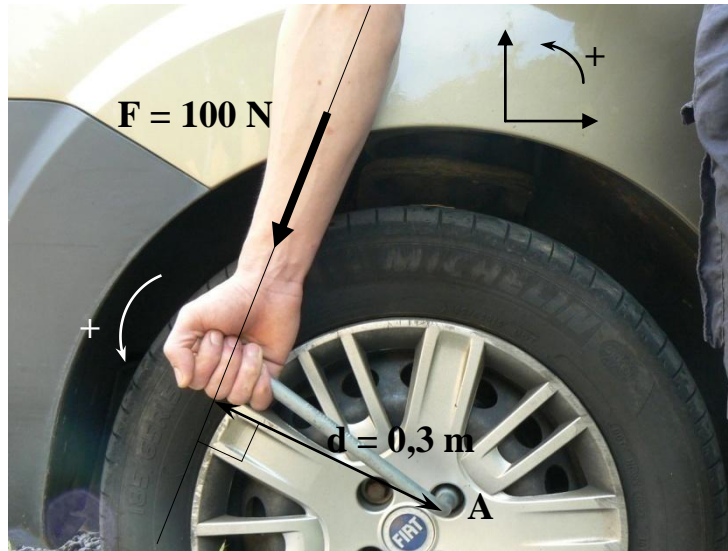


Figure B3 : Calcul de la valeur d'un moment

Remarque (figure B4): La valeur du moment reste identique si l'on fait glisser le vecteur force sur sa ligne d'action. Cela peut permettre de mieux visualiser le signe du moment et de simplifier le calcul.

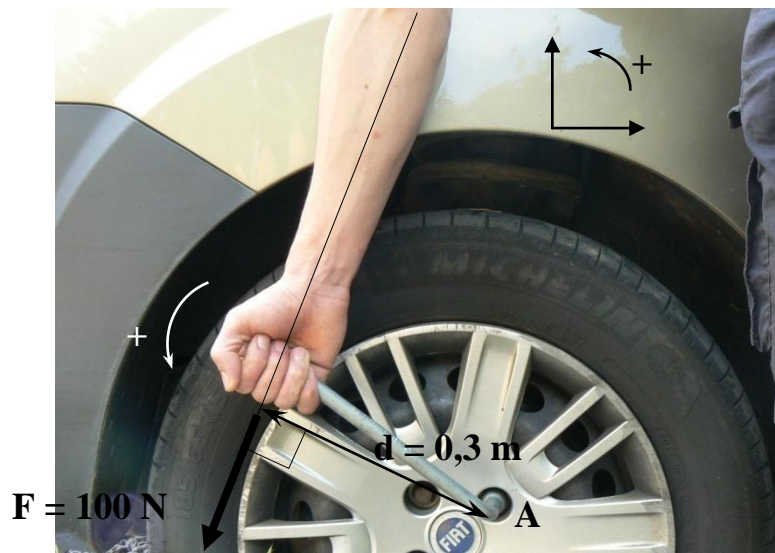


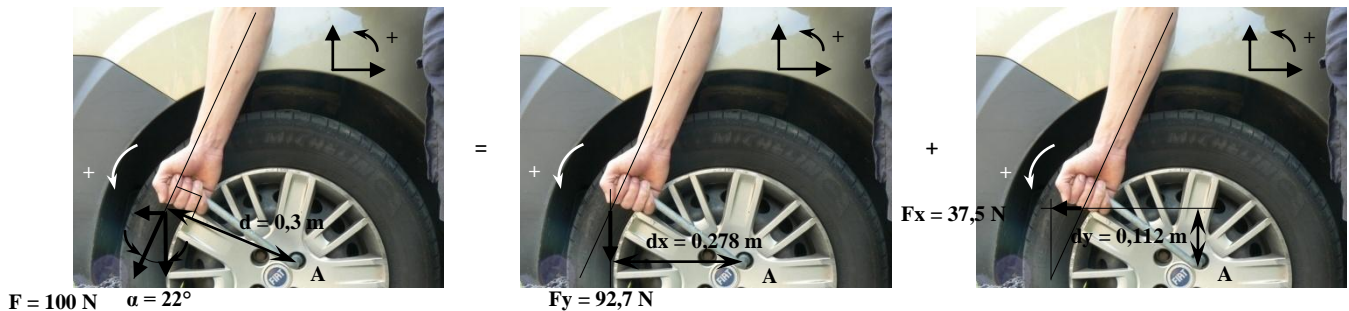
Figure B4 : Intérêt d'un vecteur glisseur

Relation de Varignon

Lorsqu'une force est inclinée par rapport au repère, la distance la plus courte entre la ligne supportant la force et le centre de rotation peut-être compliqué à définir. Il peut-être plus pratique de décomposer la force sur les axes (ox) et (oy) puis de calculer les deux moments provoqués par chacune de ses projections. En effet, le moment par rapport à un point d'une force est égal à la somme des moments, par rapport à ce même point, des composantes de cette force (figure B5).

Reprenons l'exemple de l'écrou vissé avec une clé. Le moment précédemment calculé est de 30 N.m. Avec la relation de Varignon, le calcul devient :

$$M_A(F) = F_y \times d_x + F_x \times d_y = 92,7 \times 0,278 + 37,5 \times 0,112 = 30 \text{ N.m}$$



En faisant glisser les vecteurs F_x et F_y :

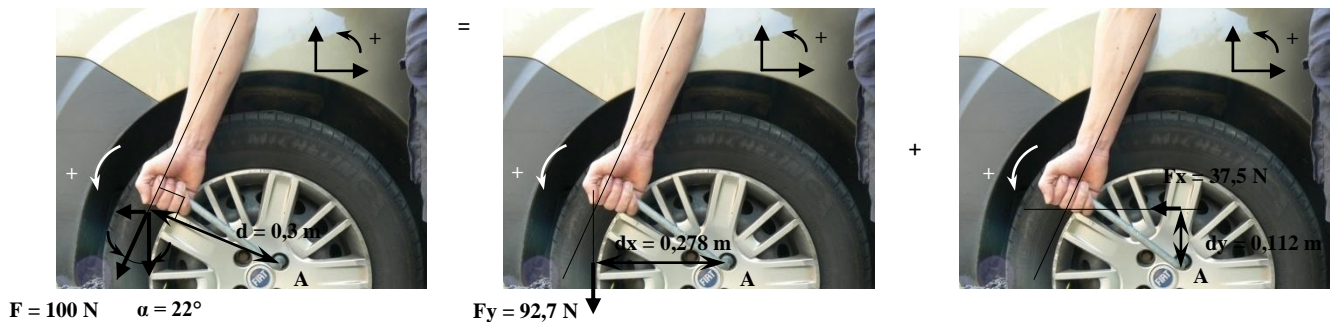


Figure B5 : Calcul de la valeur d'un moment avec la relation de Varignon

Remarque : attention une composante de la force peut provoquer un moment positif et l'autre composante un moment négatif.

1.2 Les principales liaisons employées dans le bâtiment

Lors d'une étude dans le plan, les principales liaisons employées dans le bâtiment sont l'appui plan, le pivot et l'encastrement. Les efforts que l'on peut transmettre d'un élément à un autre sont fonction des mouvements (ou degré de liberté) possibles en fonction de la nature de la liaison.

1.2.1 Les degrés de liberté dans le plan

Si un élément n'est pas lié à un autre élément (donc n'a aucune liaison), il possède 3 degrés de liberté dans le plan (xoy), 2 translations T_x et T_y et 1 rotation R_z (figure B6).

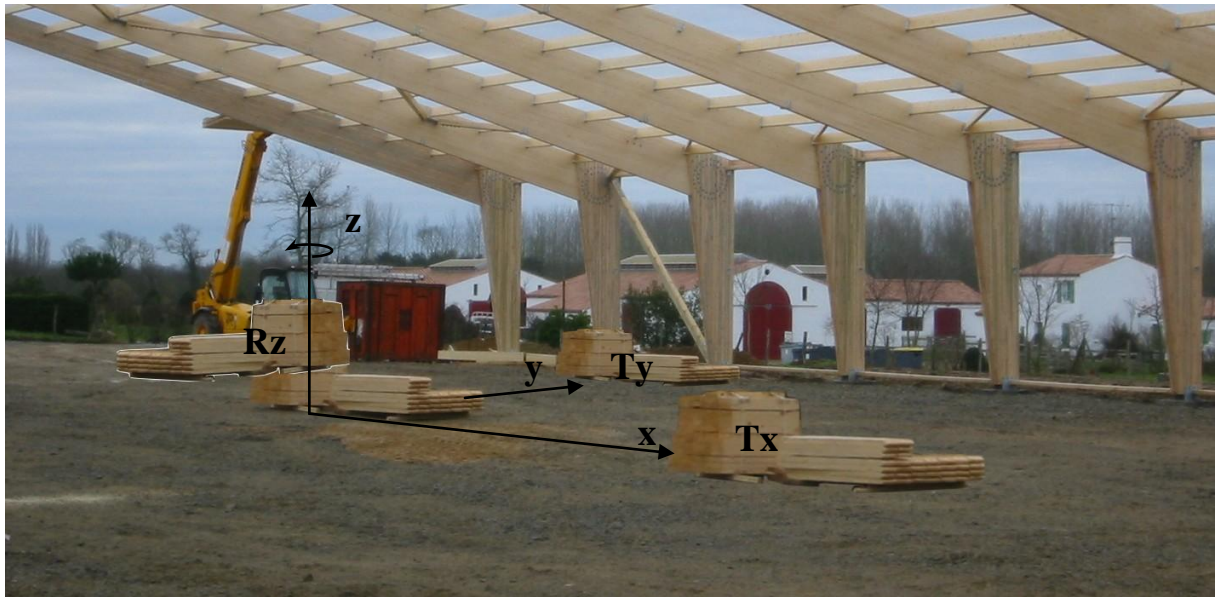


Figure B6 : Degrés de liberté dans le plan (@ Charpente Fournier)

Dès qu'il est lié à un autre élément, la liaison limite les degrés de liberté. Lorsque les translations T_x et T_y sont supprimées, elles permettent de transmettre un effort selon x et y . Lorsque la rotation R_z est supprimée, elle permet de transmettre un moment porté par l'axe z .

1.2.2 La liaison appuis plan

La liaison appui plan est la plus simple. On la rencontre lorsque deux pièces sont en contacts comme par exemple une solive sur une porteuse. Dans notre exemple (suivant le plan (xoy) défini dans la figure B7), la translation T_y est supprimée. Un effort sera transmis sur cet axe entre la solive et la porteuse. La translation T_x étant possible, en négligeant les frottements, aucun effort entre les deux pièces ne peut transiter sur cet axe. La rotation R_z étant possible, en négligeant les frottements, aucun moment entre les deux pièces ne peut transiter sur cet axe. La solive peut glisser suivant la translation T_x et elle peut avoir une rotation autour de l'axe z (R_z).

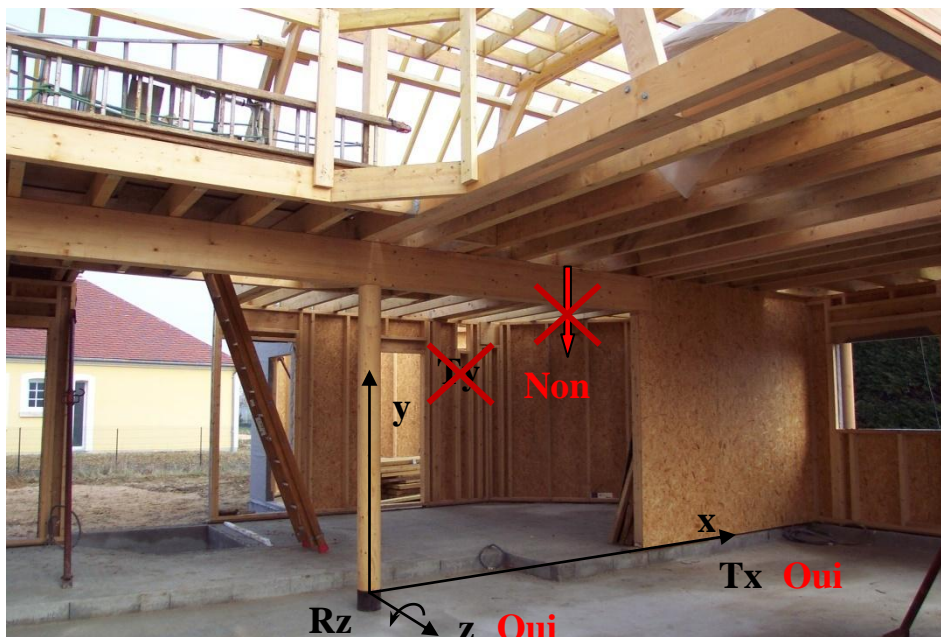


Figure B7 : Liaison appuis plan (@ MBC (Maison Bois Cruard))

Remarque : Il suffit qu'un seul sens soit bloqué (vers le bas pour notre exemple) pour que la translation soit considérée comme bloquée, même si la translation dirigée vers le haut est possible.

1.2.3 La liaison pivot

La liaison pivot est très fréquente dans les structures en bois. On la rencontre dans les assemblages boulonnés bois/bois, avec ferrure... Dans notre exemple (suivant le plan (xoy) défini dans la figure B8), les translations T_x et T_y sont supprimées. Un effort sera transmis sur ces deux axes entre la ferrure d'arbalétrier et la ferrure de contreventement. La rotation R_z étant possible, en négligeant les frottements, aucun moment entre les deux pièces ne peut transiter sur cet axe. La ferrure de contreventement peut avoir une rotation autour de l'axe z (R_z).

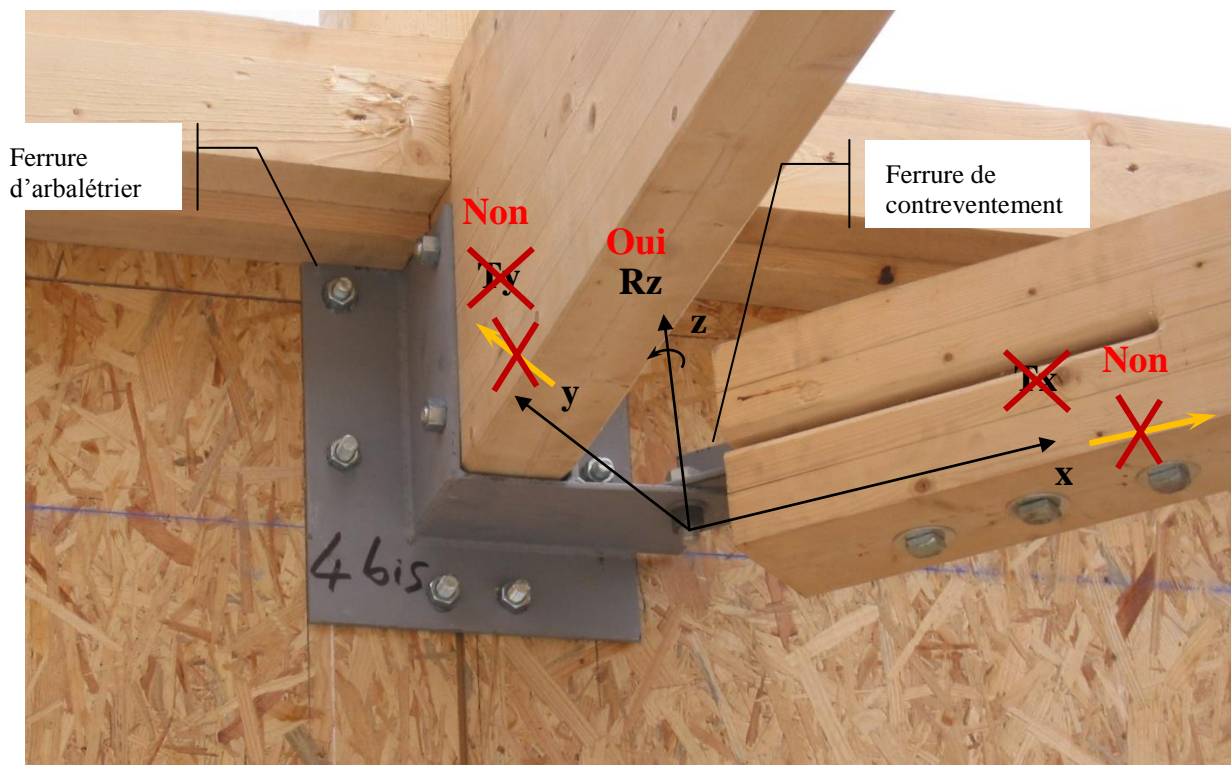


Figure B8 : Liaison pivot (@ Leduc Structure Bois)

Remarque (figure B9): de nombreux assemblages comprennent plusieurs boulons. La rotation de l'assemblage semble impossible. Cependant, dans la majorité des applications, la rotation de la pièce est très faible, de 1 à 2° car elle correspond à sa déformation. Cette rotation est possible grâce au jeu provenant des perçages d'un diamètre de 1 mm supérieur à celui des boulons. Attention, si la modélisation de l'assemblage a été un encastrement, un moment est à transmettre (Cf. le paragraphe 1.2.4 « La liaison encastrement »), il peut multiplier par dix les efforts dans les boulons.

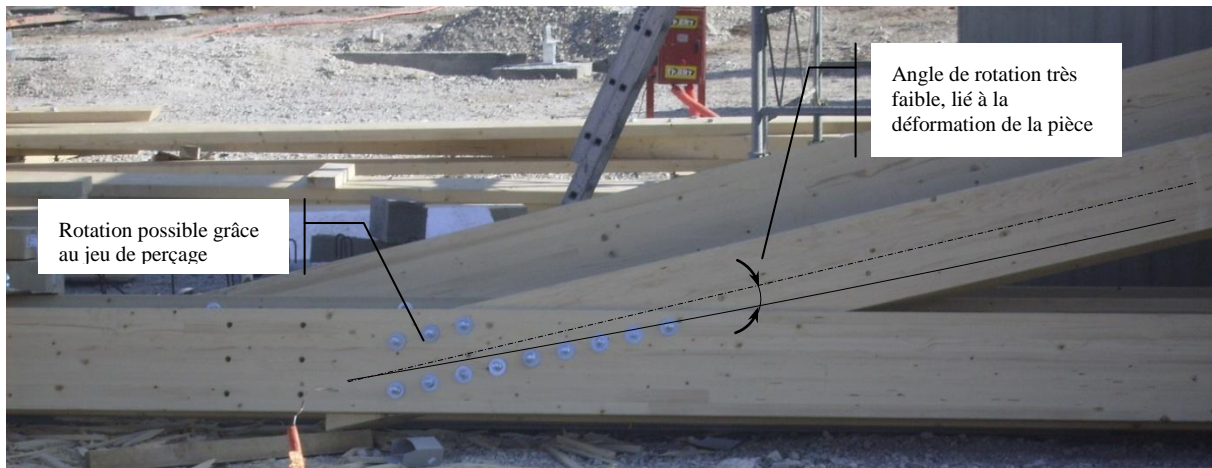


Figure B9 : Liaison pivot réalisée avec plusieurs boulons (@ Cosylva)

1.2.4 La liaison encastrement

La liaison encastrement est peu fréquente dans les structures en bois. On la rencontre essentiellement avec la couronne de boulons et plus rarement avec des assemblages collés. Ces derniers n'étant traditionnels, un avis technique est nécessaire. Dans notre exemple (suivant le plan (xoy) défini dans la figure B10), les translations T_x et T_y sont supprimées. Un effort sera transmis sur ces deux axes entre l'arbalétrier et le poteau. Par ailleurs, la rotation R_z étant impossible un moment entre les deux pièces sera transmise sur cet axe. Il n'existe aucune possibilité de mouvement entre l'arbalétrier et le poteau. Attention, un moment augmente considérablement les efforts sur les boulons de la couronne.

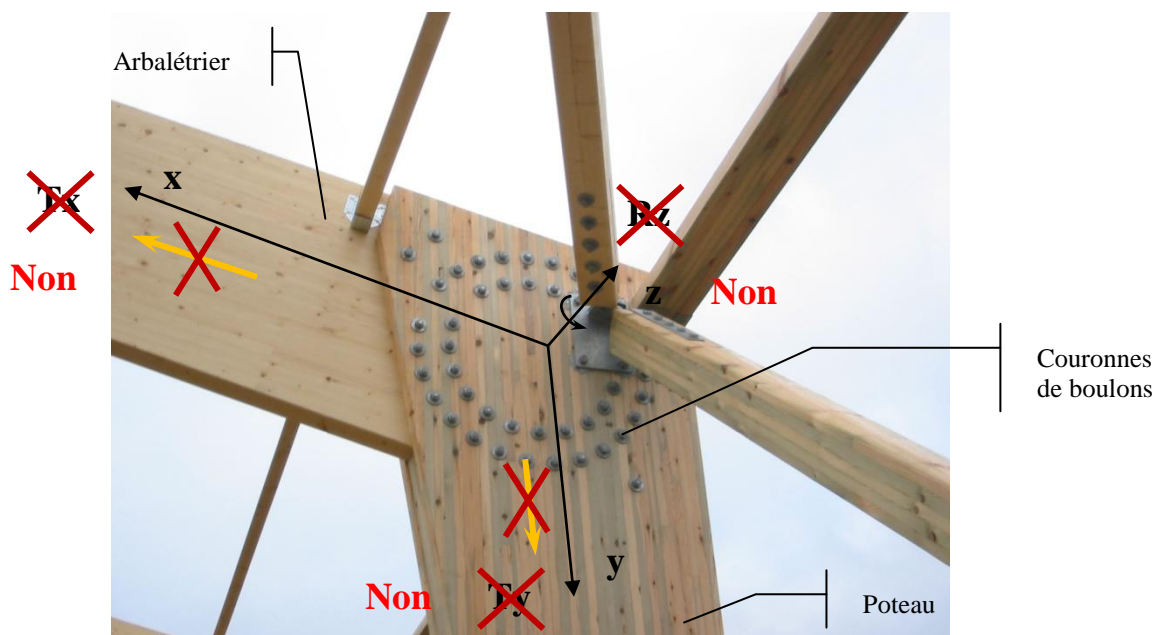


Figure B10 : Liaison encastrement réalisée avec une double couronne de boulons (@ Charpentes Fournier)

1.3 Application du Principe Fondamental de la Statique (PFS) dans le plan (xoy)

Une poutre ou une structure est en équilibre lorsque la somme des efforts projetés sur les axes x et y est nulle et lorsque la somme des moments portés par l'axe z est nulle :

- somme des efforts projetés sur l'axe x : $\sum F_x = 0$
- somme des efforts projetés sur l'axe y : $\sum F_y = 0$
- somme des moments portés par l'axe z : $\sum M_i \left(\vec{F} \right) = 0$

1.3.1 Poutre sur deux appuis en console avec une charge uniformément répartie

Considérons une solive avec un porte à faux d'une pièce d'habitation. Elle repose à une extrémité sur un sabot et sur une porteuse afin de créer le porte à faux (Cf. figure B11). Cette solive supporte des charges de structure (G) et d'exploitation (Q). La distance entre les deux appuis est de 4,5 m et le porte à faux est de 1,5 m.

Le calcul de la descente de charges à permis de définir les valeurs de charges :

- charge uniformément répartie provoquée par la structure (G) : 0,2 kN/m
- charge uniformément répartie provoqué par l'exploitation du bâtiment (Q) : 0,75 kN/m

La combinaison retenue est $1,35G + 1,5Q$, soit une charge de calcul de $1,35 \times 0,2 + 1,5 \times 0,75 = 1,4$ kN/m

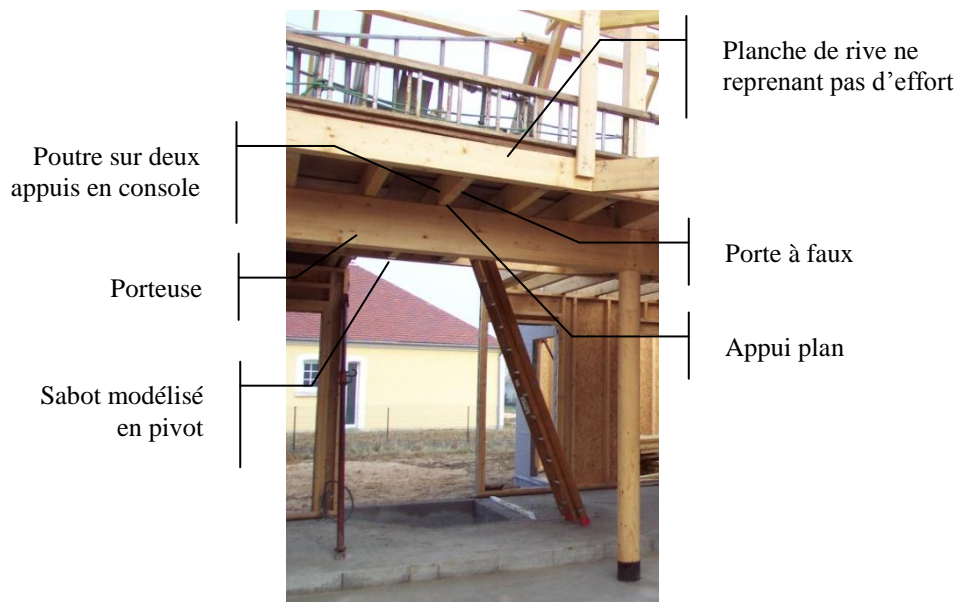


Figure B11 : Poutre sur deux appuis en console avec une charge ponctuelle (@ MBC (Maison Bois Cruard))

Etape 1 : Isoler et modéliser la poutre

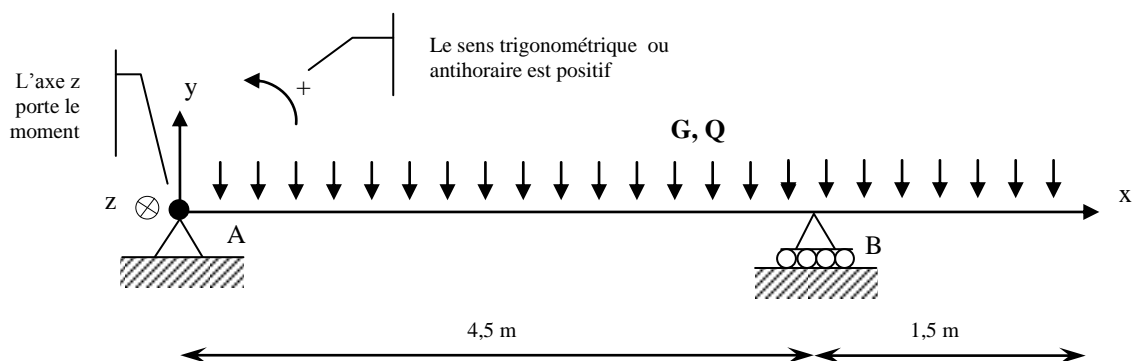


Figure B12 : Modélisation de la poutre

Le sabot est modélisé en pivot et l'appui de la solive sur la porteuse en appui simple. L'axe x est parallèle à la longueur de la poutre, l'axe y est parallèle à la hauteur de la poutre et l'axe z est parallèle à l'épaisseur de la

poutre. L'axe z porte le moment. Par convention le sens trigonométrique est positif (figure B12). Attention, ce repère est employé en mécanique. L'Eurocode a inversé les axes y et z (figure B13).

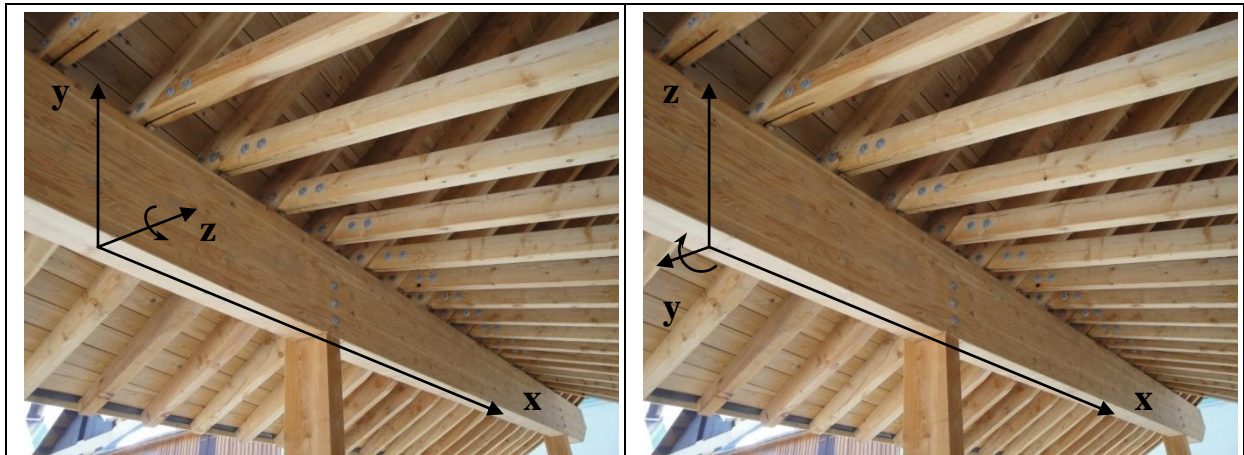


Figure B13 : A gauche, le repère employé lors d'une étude mécanique, l'axe y est sur la hauteur de la poutre et l'axe z sur l'épaisseur de la poutre. A droite, le repère employé lors d'une étude avec les Eurocode, l'axe z est sur la hauteur de la poutre et l'axe y sur l'épaisseur de la poutre. (@ Cosylva)

Remarque :

- Lorsque l'on modélise une poutre, il est préférable de sélectionner une liaison pivot à l'origine du repère même s'il n'y a aucun effort horizontal. Lorsqu'une étude sera réalisée avec un logiciel, ce pivot sera nécessaire.
- Une liaison modélisée en pivot doit-être capable de reprendre les efforts supportés sur les deux axes (Cf. le paragraphe 1.2.3). Un sabot reprendra fréquemment 3 fois moins d'efforts sur l'axe x par rapport aux efforts sur l'axe y.

Etape 2 : Calculer la résultante et remplacer les liaisons par les efforts inconnus

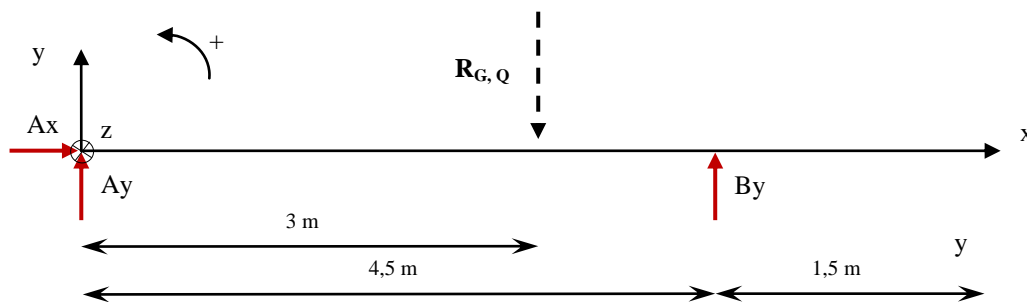


Figure B14 : Efforts extérieurs à la poutre

Pour réaliser l'étude statique, la charge uniformément répartie est transformée en résultante. Elle est au milieu de cette charge (la poutre pour notre exemple). Les efforts inconnus sont placés en fonction de la nature des liaisons et toujours dans le sens positif du repère.

- $R_{G,Q} = 1,4 \times 6 = 8,4 \text{ kN}$, située à $6/2 = 3 \text{ m}$ du point A.
- Au point A nous avons une liaison pivot, donc deux inconnues, A_x et A_y .
- Au point B nous avons un appui plan, donc une inconnue, B_y .

Etape 3 : Réaliser le bilan des actions extérieures

Le bilan des actions extérieures est réalisé sous la forme de tableau. Il permet de vérifier qu'il n'y a pas plus d'inconnues que d'équations de la statique (trois pour une étude plane). Le cas contraire, le problème ne peut pas être résolu. En outre ce tableau facilite l'écriture des équations de la statique pour la prochaine étape.

Tableau B1 : bilan des actions extérieures

	A	R_{G,Q}	B
Axe x	Ax	0	0
Axe y	Ay	- 8,4 kN	By
Moment dans la liaison	0	0	0

Il existe trois inconnues (Ax, Ay et By), la statique offre 3 équations ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M\left(\vec{\rightarrow}_F\right) = 0$), l'étude peut-être réalisée.

Remarque : Il peut exister un moment uniquement si la liaison est un encastrement.

Etape 4 : Appliquer le Principe Fondamental de la Statique (PFS)

Rappelons le PFS, la somme des efforts projetés sur les axes x et y est nulle et la somme des moments portés par l'axe z est nulle.

- somme des efforts projetés sur l'axe x : $\sum F_x = 0$
- somme des efforts projetés sur l'axe y : $\sum F_y = 0$
- somme des moments portés par l'axe z : $\sum M_i\left(\vec{\rightarrow}_F\right) = 0$

Les deux premières équations concernant la somme des efforts projetés sur les axes x et y se déduisent directement du tableau du bilan des actions extérieures de l'étape 3.

- $\sum F_x = 0$: $Ax + 0 + 0 = 0$; d'où $Ax = 0$
- $\sum F_y = 0$: $Ay - 8,4 + By = 0$

L'équation des moments s'écrit au point (ou centre de rotation) qui permet d'éliminer le plus d'inconnues (Cf. le tableau du bilan des actions extérieures de l'étape 3). En effet, lorsque la distance entre l'effort et le point est nulle, le moment est nul (Cf. le paragraphe « 1.1.2 Moment »). En prenant le point A comme centre de rotation, les moments provoqués par Ax et Ay sont nul. L'équation des moments est simplifiée.

- $\sum M_i\left(\vec{\rightarrow}_F\right) = 0$: $M_A\left(\vec{\rightarrow}_B\right) + M_A\left(\vec{\rightarrow}_R\right) = 0$
 - $By \times 4,5 - 8,4 \times 3 = 0$; (Cf. Figure B14)
 - d'où $By = \frac{8,4 \times 3}{4,5} = 5,6 \text{ kN}$

De l'équation $\sum F_y = 0$; $Ay = 8,4 - 5,6 = 2,8 \text{ kN}$

Cette étude a permis de définir les réactions aux appuis, $Ax = 0$; $Ay = 2,8 \text{ kN}$ et $By = 5,6 \text{ kN}$

Remarque :

- $M_A\left(\vec{\rightarrow}_A\right) = 0$

- La figure B14 permet d'identifier le sens de rotation des moments par rapport au centre de rotation A. La force B provoque un sens trigonométrique de rotation (ou antihoraire). Le moment est positif. La force $R_{G,Q}$ provoque un sens anti-trigonométrique de rotation (ou horaire). Le moment est négatif.

1.3.2 Poutre sur deux appuis en console (avec un porte à faux) avec une charge ponctuelle et une charge uniformément répartie

Considérons une structure en poteau-poutre d'un bâtiment recevant du public. La poutre est assemblée par boulons à une extrémité et repose sur un poteau afin de créer le porte à faux (Cf. figure B15). Elle supporte des charges de structure (G), de neige (S) et d'exploitation (Q). La distance entre les deux appuis est de 7 m et le porte à faux est de 3 m.



Figure B15 : Poutre sur deux appuis en console avec une charge ponctuelle

Le calcul de la descente de charge à permis de définir les charges provoquées par la structure (G) par la neige (S) et par l'exploitation du bâtiment (Q).

- charge ponctuelle provoquée par la structure (G) : 20 kN
- charge ponctuelle provoquée par la neige (S) : 17,3 kN
- charge uniformément répartie provoqué par la structure du local (G), 2,8 kN/m et son exploitation (Q), 7,5 kN/m

La combinaison retenue est $1,35G + 1,5Q + 1,5 \times 0,5S$,

- soit pour la charge ponctuelle : $1,35 \times 20 + 1,5 \times 0,5 \times 17,3 = 40$ kN
- soit pour la charge uniformément répartie : $1,35 \times 2,8 + 1,5 \times 7,5 = 15$ kN/m

Etape 1 : Isoler et modéliser la poutre

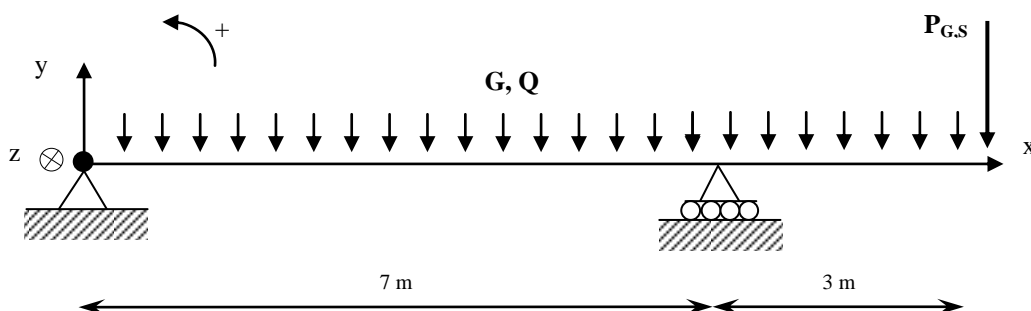


Figure B16 : Modélisation de la poutre

L'assemblage par boulon est modélisé en pivot et l'appui de la poutre sur le poteau en appui simple (Figure B16).

Etape 2 : Calculer la résultante et remplacer les liaisons par les efforts inconnus

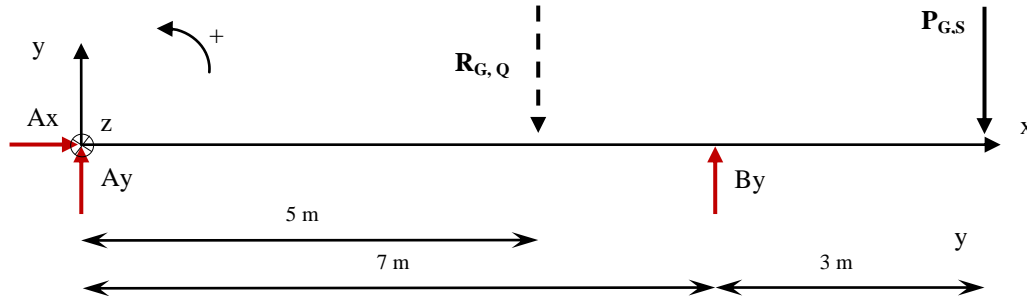


Figure B17 : Efforts extérieurs à la poutre

Pour réaliser l'étude statique, la charge uniformément répartie est transformée en résultante. Elle est au milieu de cette charge (la poutre pour notre exemple). Les efforts inconnus sont placés en fonction de la nature des liaisons et toujours dans le sens positif du repère.

- $R_{G,Q} = 15 \times 10 = 150 \text{ kN}$, située à $10/2 = 5 \text{ m}$ du point A.
- Au point A nous avons une liaison pivot, donc deux inconnues, A_x et A_y .
- Au point B nous avons un appui plan, donc une inconnue, B_y .

Etape 3 : Réaliser le bilan des actions extérieures

Le bilan des actions extérieures est réalisé sous la forme de tableau.

Tableau B2 : bilan des actions extérieures

	A	$R_{G,Q}$	B	$P_{G,S}$
Axe x	A_x	0	0	0
Axe y	A_y	- 150 kN	B_y	-40 kN
Moment dans la liaison	0	0	0	0

Il existe trois inconnues (A_x , A_y et B_y), la statique offre 3 équations ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M \left(\vec{r} \right) = 0$), l'étude peut-être réalisée.

Etape 4 : Appliquer le Principe Fondamental de la Statique (PFS)

Les deux équations concernant la somme des efforts projetés sur les axes x et y se déduisent directement du tableau du bilan des actions extérieures de l'étape 3.

- $\sum F_x = 0 : A_x + 0 + 0 = 0$; d'où $A_x = 0$
- $\sum F_y = 0 : A_y - 150 + B_y - 40 = 0$

L'équation des moments s'écrit au centre de rotation A (point où il y a le plus d'inconnues)

$$\begin{aligned}
- \quad \sum M_i \left(\vec{\rightarrow}_F \right) &= 0 : M_A \left(\vec{\rightarrow}_B \right) + M_A \left(\vec{\rightarrow}_R \right) + M_A \left(\vec{\rightarrow}_P \right) = 0 \\
&\quad \blacksquare By \times 7 - 150 \times 5 - 40 \times 10 = 0 ; \text{ (figure B17)} \\
&\quad \blacksquare \text{ d'où } By = \frac{150 \times 5 + 40 \times 10}{7} = 164 \text{ kN}
\end{aligned}$$

De l'équation $\sum F_y = 0$; $A_y = 150 + 40 - 164 = 26 \text{ kN}$

Cette étude à permis de définir les réactions aux appuis, $A_x = 0$; $A_y = 26 \text{ kN}$ et $By = 164 \text{ kN}$

1.3.3 Chevron-arbalétrier avec un porte à faux

Considérons une toiture avec une avancée. Elle est composée d'une couverture en tuile mécanique inclinée à 20° . La structure est composée de chevron-arbalétriers. La distance entre les deux appuis est de 5 m et le porte à faux est de 1 m. Le chevron-arbalétriers est assemblée par clouage à une extrémité et repose sur la lisse haute du mur afin de créer le porte à faux (Cf. figure B18). Elle supporte des charges de structure (G) et de neige (S).



Figure B18 : Chevron-arbalétrier avec un porte à faux

Le calcul de la descente de charge à permis de définir les charges provoquées par la structure (G) et par la neige (S).

- charge uniformément répartie provoqué par la structure (G) : $0,5 \text{ kN/m}$
- charge uniformément répartie provoqué par la neige (S) : $0,35 \text{ kN/m}$

La combinaison retenue est $1,35G + 1,5S$, soit $1,35 \times 0,5 + 1,5 \times 0,35 = 1,2 \text{ kN/m}$

Etape 1 : Isoler et modéliser la poutre

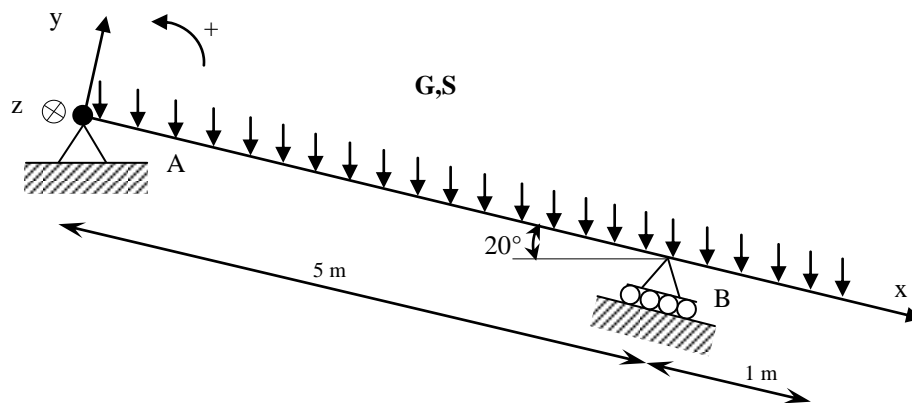


Figure B19 : Modélisation de la poutre

L'assemblage par pointe est modélisé en pivot et l'appui du chevron-arbalétrier sur la lisse haute du mur en appui simple (Figure B19).

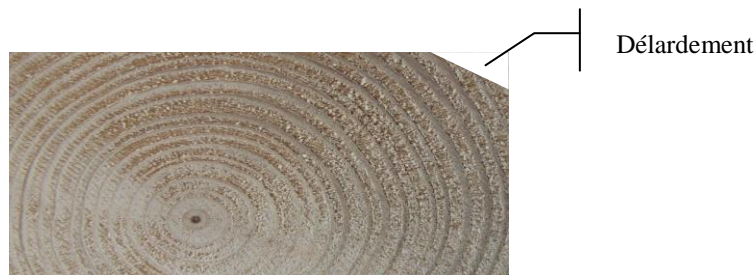


Figure B20 : Section de la lisse haute du mur délardée

Remarque : La lisse haute du mur est délardée. L'appui plan est donc parallèle et la réaction d'appui perpendiculaire au chevron-arbalétrier (figure 20)

Etape 2 : Calculer la résultante et remplacer les liaisons par les efforts inconnus

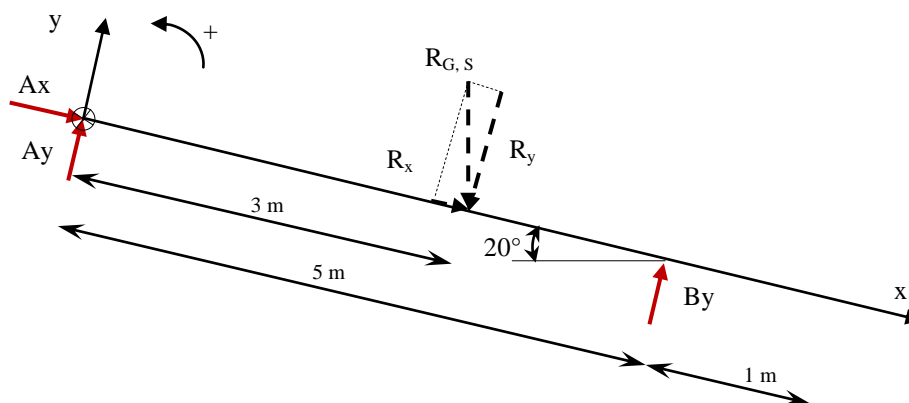


Figure B21 : Efforts extérieurs à la poutre

Pour réaliser l'étude statique, la charge uniformément répartie est transformée en résultante. Elle est au milieu de cette charge (la poutre pour notre exemple). La résultante est projetée sur les axes x et y. Les efforts inconnus sont placés en fonction de la nature des liaisons et toujours dans le sens positif du repère.

- $R_{G,S} = 1,2 \times 6 = 7,2 \text{ kN}$, située à $6/2 = 3 \text{ m}$ du point A.

- $R_x = 7,2 \times \sin(20^\circ) = 2,5 \text{ kN}$,
- $R_y = -7,2 \times \cos(20^\circ) = -6,8 \text{ kN}$
- Au point A nous avons une liaison pivot, donc deux inconnues, A_x et A_y .
- Au point B nous avons un appui plan, donc une inconnue, B_y .

Etape 3 : Réaliser le bilan des actions extérieures

Le bilan des actions extérieures est réalisé sous la forme de tableau.

Tableau B3 : bilan des actions extérieures

	A	$R_{G,Q}$	B
Axe x	A_x	2,5 kN	0
Axe y	A_y	- 6,8 kN	B_y
Moment dans la liaison	0	0	0

Il existe trois inconnues (A_x , A_y et B_y), la statique offre 3 équations ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M(\vec{r}) = 0$), l'étude peut-être réalisée.

Etape 4 : Appliquer le Principe Fondamental de la Statique (PFS)

Les deux équations concernant la somme des efforts projetés sur les axes x et y se déduisent directement du tableau du bilan des actions extérieures de l'étape 3.

- $\sum F_x = 0 : A_x + 2,5 + 0 = 0$; d'où $A_x = -2,5 \text{ kN}$
- $\sum F_y = 0 : A_y - 6,8 + B_y = 0$

L'équation des moments s'écrit au centre de rotation A (point où il y a le plus d'inconnues)

- $\sum M_i(\vec{r}) = 0 : M_A(\vec{r}_B) + M_A(\vec{r}_R) = 0$
 - $B_y \times 5 - 6,8 \times 3 = 0$; (figure B21)
 - d'où $B_y = \frac{6,8 \times 3}{5} = 4,1 \text{ kN}$

De l'équation $\sum F_y = 0$; $A_y = 6,8 - 4,1 = 2,7 \text{ kN}$

Cette étude a permis de définir les réactions aux appuis, $A_x = -2,5$; $A_y = 2,7 \text{ kN}$ et $B_y = 4,1 \text{ kN}$

1.3.4 Structure triangulée : cas du treillis

Considérons un préau. La structure est triangulée avec deux arbalétriers, deux contrefiches, un poinçon et un entrain. La structure est inclinée à 40° . Elle supporte une couverture en tuile mécanique et de la neige (Figure 22). Les assemblages à chaque extrémité de toutes les pièces sont réalisés avec des tenons-mortaises et des boulons.



Figure B22 : Chevron-arbalétrier avec un porte à faux (@ Leduc Structure Bois)

La charge provoqué par la structure (G) est de $0,5 \text{ kN/m}^2$ réel (ou rampant). La charge provoquée par la neige (S) est de $0,184 \text{ kN/m}^2$ réel. Les charges sont ponctuelles car elles sont transmises à la structure par les pannes. La surface de couverture transmise au droit des pannes correspond à la moitié de la longueur de la panne (3 m) multiplié par la bande de chargement (soit l'entraxe de la panne de 1,973 m). La surface est de $3 \times 1,973 = 5,92 \text{ m}^2$. Le calcul de la descente de charge est de :

- charge ponctuelle « P » provoqué par la structure (G) : $0,5 \times 5,92 = 2,96 \text{ kN}$
- charge ponctuelle « P » provoqué par la neige (S) : $0,184 \times 5,92 = 1,1 \text{ kN}$

La combinaison retenue est 1,35G, soit « P » pour le calcul : $1,35 \times 2,96 = 4 \text{ kN}$

Remarque : La combinaison 1,35G est plus défavorable que la combinaison $1,35G + 1,5S$ car G est important par rapport à S et la résistance du bois est plus faible avec une charge de longue durée.

Etape 1 : Isoler et modéliser la structure

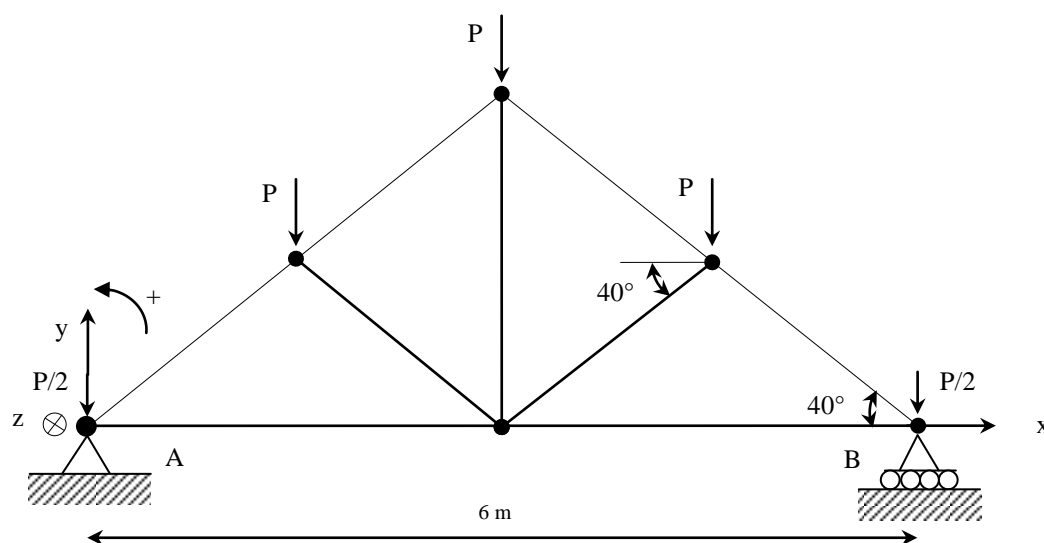


Figure B23 : Modélisation de la structure sous la forme de treillis afin d'être résoluble par la statique.

Les assemblages par tenons-mortaises et boulons sont modélisés en pivot car ils permettent une rotation de quelques degrés. Afin d'obtenir un système résolvable par la statique, chaque extrémité des barres doit être modélisée par pivot et chaque barre doit appartenir à un triangle pour former un treillis (Figure B23). Cela revient à « couper » les arbalétriers et l'entrait et de les assembler avec une liaison pivot. Grâce à la modélisation par treillis, chaque barre est soumise à deux forces (leur poids est négligé). Pour que la barre soit en équilibre la direction des forces sera celle de la barre, de sens opposé et de même intensité. Elles travailleront uniquement en traction ou en compression. L'intersection des axes des barres forment les nœuds ; ce sont les points d'assemblage des barres. D'un point de vue mécanique, les nœuds sont modélisés par des articulations parfaites. Les charges sont appliquées au droit des nœuds.



Figure B23 bis : Equilibre d'une barre soumise à deux forces

Remarque : En réalité, les arbalétriers et l'entrait sont continus. Il existe un encastrement entre les barres formant ces pièces. Il y a plus d'inconnues que d'équation de la statique, l'étude est hyperstatique. Elle devrait être réalisée avec un ordinateur (Figure B24).

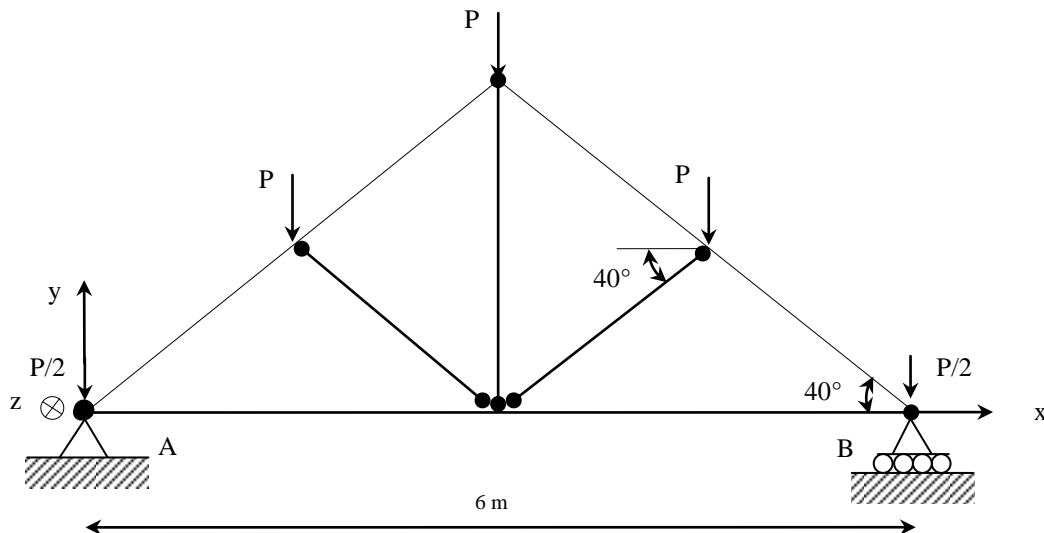


Figure B24 : Modélisation réelle de la structure hyperstatique

Etape 2 : Remplacer les liaisons par les efforts inconnus et calculer la réaction aux appuis.

Les efforts inconnus sont placés en fonction de la nature des liaisons et toujours dans le sens positif du repère (figure B25).

- Au point A nous avons une liaison pivot, donc deux inconnues, A_x et A_y .
- Au point B nous avons un appui plan, donc une inconnue, B_y .
- $P = 4 \text{ kN}$

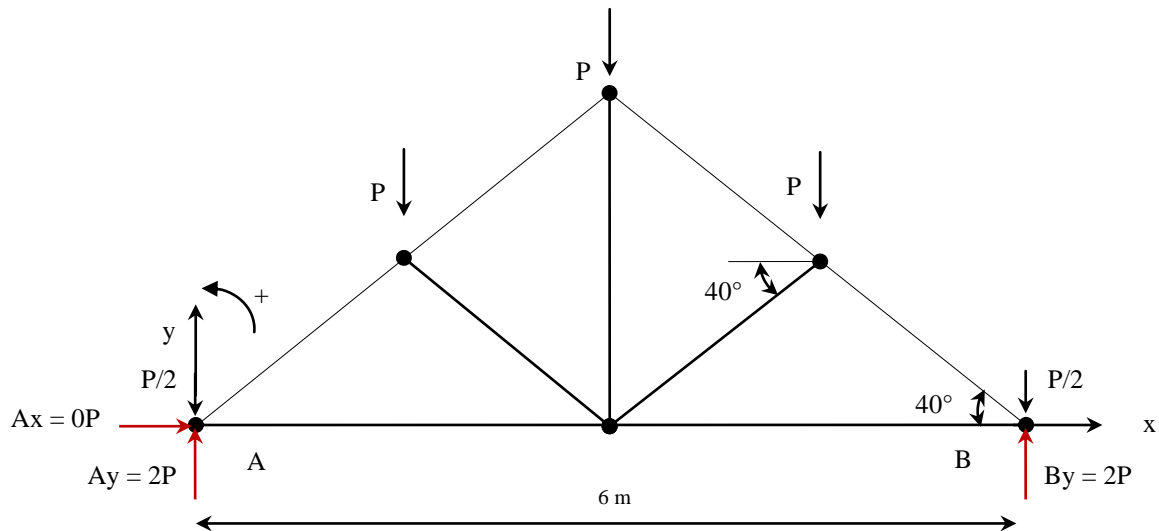


Figure B25 : Réaction aux appuis

La méthode de calcul de la réaction aux appuis peut-être simplifiée car le chargement est vertical et symétrique.

- Chargement vertical : Aucun effort sur l'axe x, $0P + Ax = 0$, $Ax = 0$
- Chargement symétrique : $Ay = By = (P/2 + P + P + P + P/2)/2 = 4P/2 = 2P = 2 \times 4 = 8 \text{ kN}$

Etape 3 : Nommer les barres et les nœuds

La moitié de la ferme est étudiée car la structure de la ferme et le chargement sont symétriques. Chaque barre est numérotée de 1 à 5 et chaque nœud est repéré de « a » à « d » (figure B25).

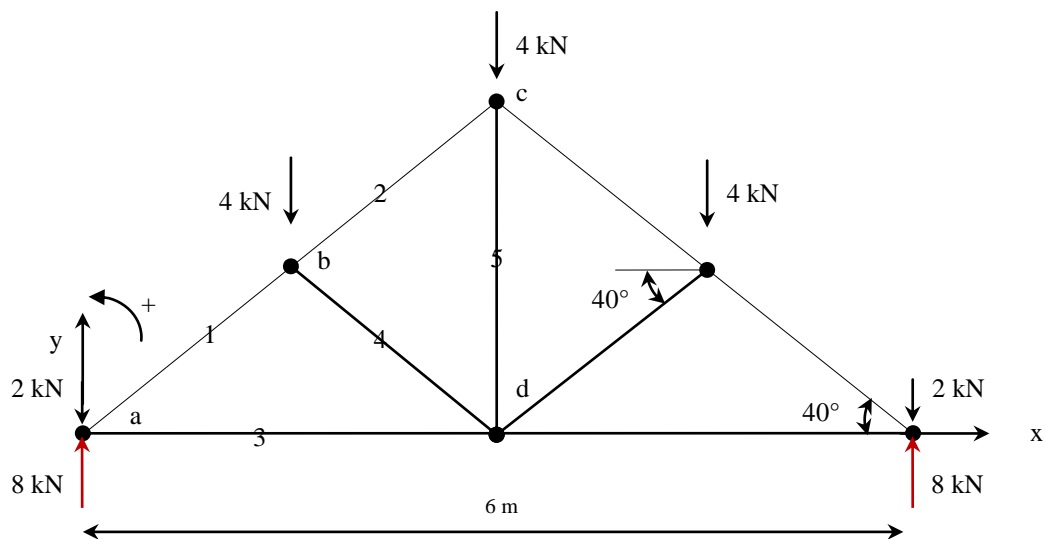


Figure B25 : Repérage des barres et des nœuds

Etape 4 : Isoler chaque nœud et appliquer le Principe Fondamental de la Statique (PFS)

La méthode consiste à isoler chaque nœud en commençant par un nœud (a) avec deux inconnues, les barres 1 et 3. Lorsque l'équilibre du nœud (a) sera calculé, l'effort dans la barre 1 sera connu. Il sera possible d'isoler le nœud (b) car il n'aura plus que deux inconnues, les barres 2 et 4. Le même déroulement sera appliqué aux nœuds suivants (figures 25 et 26).

Remarque : le Principe Fondamental de la Statique (PFS) n'apporte que deux équations non nulles, $\sum F_x = 0$ et $\sum F_y = 0$. Tous les nœuds étant des pivots, aucun moment ne peut-être transmis, l'équation des moments, $\sum M(\vec{F}) = 0$ est $0 = 0$, elle ne permet pas de définir une inconnue.

Nœud (a) isolé

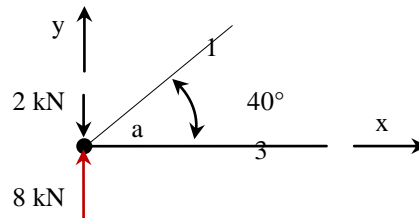


Figure B26 : Nœud (a) isolé

- Equation 1, $\sum F_x = 0 : x_1 + x_3 = 0$
 - o Avec, $x_1 = F_1 \cos(40^\circ)$ et $x_3 = F_3$ car la barre 3 est horizontale
 - o $F_1 \cos(40^\circ) + F_3 = 0$
- Equation 2, $\sum F_y = 0 : 8 - 2 + y_1 + y_3 = 0$
 - o Avec, $y_1 = F_1 \sin(40^\circ)$ et $y_3 = 0$ car la barre 3 est horizontale
 - o $6 + F_1 \sin(40^\circ) + 0 = 0$,
 - o $F_1 \sin(40^\circ) = -6 \text{ kN}$
 - o $F_1 = -6/\sin(40^\circ) = -9,3 \text{ kN}$
- De l'équation 1 : $F_3 = -F_1 \cos(40^\circ) = 9,3 \cos(40^\circ) = 7,2 \text{ kN}$

Remarque : F_i représente l'effort dans la barre i

Un résultat négatif indique que la barre 1 travail en compression. On place une flèche pour quelle « pousse » sur le nœud. Un résultat positif indique que la barre 3 travail en traction. On place une flèche qui « tire » sur le nœud (figure B27).

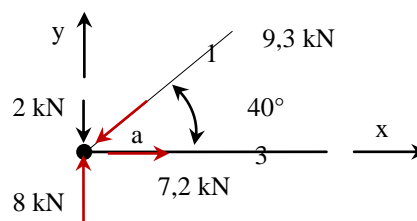


Figure B27 : Report des efforts sur le nœud (a)

Nœud (b) isolé

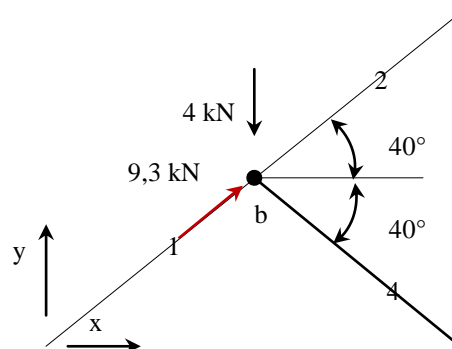


Figure B28 : Nœud (b) isolé

Remarque : F_1 est inversé car la barre travail en compression, elle pousse sur le nœud.

- Equation 1, $\sum F_x = 0 : x_1 + x_2 + x_4 = 0$
 - o Avec, $x_1 = 9,3 \cos(40^\circ)$, $x_2 = F_2 \cos(40^\circ)$ et $x_4 = F_4 \cos(40^\circ)$
 - o $7,2 + F_2 \cos(40^\circ) + F_4 \cos(40^\circ) = 0$
- Equation 2, $\sum F_y = 0 : -4 + y_1 + y_2 + y_4 = 0$
 - o Avec, $y_1 = 9,3 \sin(40^\circ)$, $y_2 = F_2 \sin(40^\circ)$ et $y_4 = -F_4 \sin(40^\circ)$
 - o $-4 + 6 + F_2 \sin(40^\circ) - F_4 \sin(40^\circ) = 0$

Attention, les cosinus et sinus de la barre 4 ont des signes opposés. Si l'on choisi le cosinus positif, le sinus sera négatif. Par contre les barres 1 et 2 ont un cosinus et un sinus de même signe (figure B29).

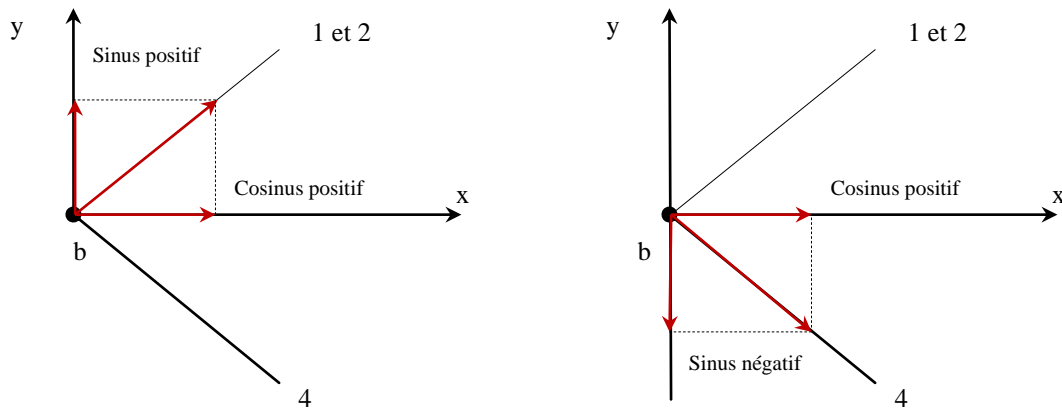


Figure B29 : Les barres 1 et 2 ont un cosinus et un sinus de même signe alors que la barre 4 ont un cosinus et un sinus de signe opposé.

Avec la méthode de substitution :

- Equation 1 : $F_2 = \frac{-7,2 - F_4 \cos(40^\circ)}{\cos(40^\circ)} = -9,3 - F_4$
- Equation 2 : $F_2 = \frac{-2 + F_4 \sin(40^\circ)}{\sin(40^\circ)} = -3,1 + F_4$
- Equations 1 et 2 : $-3,1 + F_4 = -9,3 - F_4$;
 - o $2F_4 = -9,3 + 3,1$ d'où $F_4 = \frac{-6,2}{2} = -3,1 \text{ kN}$
- Equation 2 : $F_2 = -3,1 - 3,1 = -6,2 \text{ kN}$

Les efforts sont reportés sur la figure B30 en respectant la convention de signe, lorsqu'il est négatif la barre travail en compression, elle pousse sur le nœud.

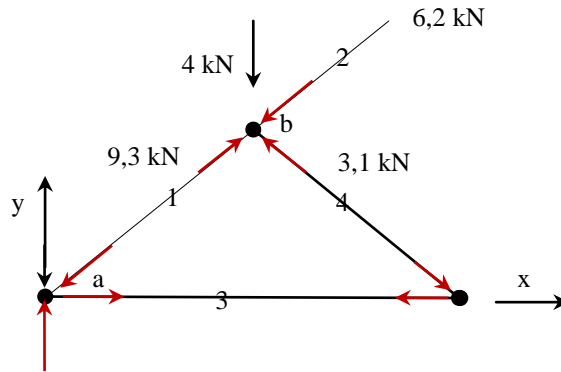


Figure B30 : Report des efforts sur le nœud (b)

Nœud (c) isolé

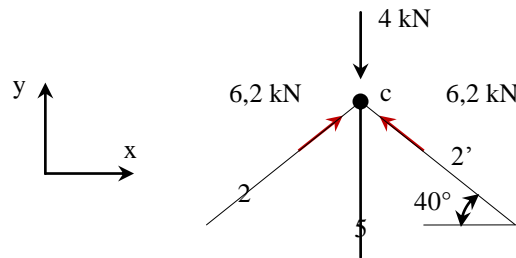


Figure B31 : Nœud (c) isolé

Remarque : Par symétrie, F_2 et $F_{2'}$ ont la même valeur mais avec une composante sur l'axe x de signe inversé.

- Equation 1, $\sum F_x = 0$: $x_2 + x_{2'} + x_5 = 0$
 - Avec, $x_2 = 6,2 \cos(40^\circ)$, $x_{2'} = -6,2 \cos(40^\circ)$ et $x_5 = 0$ car la barre 5 est verticale
 - $6,2 \cos(40^\circ) - 6,2 \cos(40^\circ) + 0 = 0$
- Equation 2, $\sum F_y = 0$: $-4 + y_2 + y_{2'} + y_5 = 0$
 - Avec, $y_2 = 6,2 \sin(40^\circ)$, $y_{2'} = 6,2 \sin(40^\circ)$ et $y_5 = F_5$ car la barre est verticale
 - $-4 + 6,2 \sin(40^\circ) + 6,2 \sin(40^\circ) + F_5 = 0$
 - $F_5 = 4 - 2 \times 6,2 \sin(40^\circ)$
 - $F_5 = -4 \text{ kN}$

Les efforts sont reportés sur la figure B32.

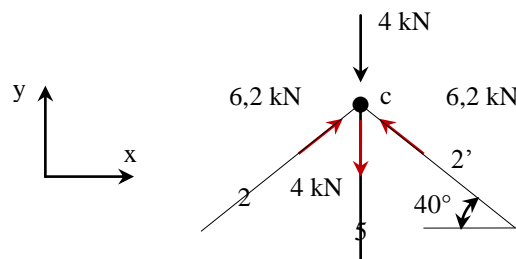


Figure B32 : Report des efforts sur le nœud (a)

1.3.5 Structure triangulée : portiques à trois articulations

Considérons un préau constitué de deux arcs. Ils sont assemblés avec des ferrures en tête d'arc et en pied de poteau (Figure 34). Chaque arc est composé d'un poteau et d'un arbalétrier assemblé par couronne de boulons (Figure 35). La toiture à une pente de 25%, soit une inclinaison de 14° (Figure 33). Elle supporte une couverture en bac acier et de la neige. L'entraxe (ou bande de chargement) entre les portiques est de 5 m.



Figure B33 : Portique à trois articulations (@ Charpentes Fournier)



Figure B35 : Assemblage avec couronne de boulons modélisé en liaison encastrement (@ Charpentes Fournier)



Figure B34 : Assemblage de pied de poteau avec une ferrure modélisée en liaison pivot (@ Charpentes Fournier)

La charge provoquée par le bac acier et les pannes (G) est de $0,146 \text{ kN/m}^2$ réel (ou rampant). La charge provoquée par la neige (S) est de $0,347 \text{ kN/m}^2$ réel. Les charges transmises par les pannes sont ponctuelles, mais comme elles sont nombreuses (12 sur chaque arbalétrier), elles ont sensiblement le même effet qu'une charge

uniformément répartie (figure B36). Pour obtenir la charge par m d'arbalétrier, il faut multiplier la charge surfacique par la bande de chargement ou l'entraxe :

- charge uniformément répartie provoqué par la structure (G) : $0,146 \times 5 = 0,73 \text{ kN/m}$
- charge uniformément répartie provoqué par la neige (S) : $0,347 \times 5 = 1,735 \text{ kN/m}$

La combinaison retenue est $1,35G + 1,5S$, soit pour le calcul $q = 1,35 \times 0,73 + 1,5 \times 1,735 = 3,588 \text{ kN/m}$

Etape 1 : Isoler et modéliser la structure

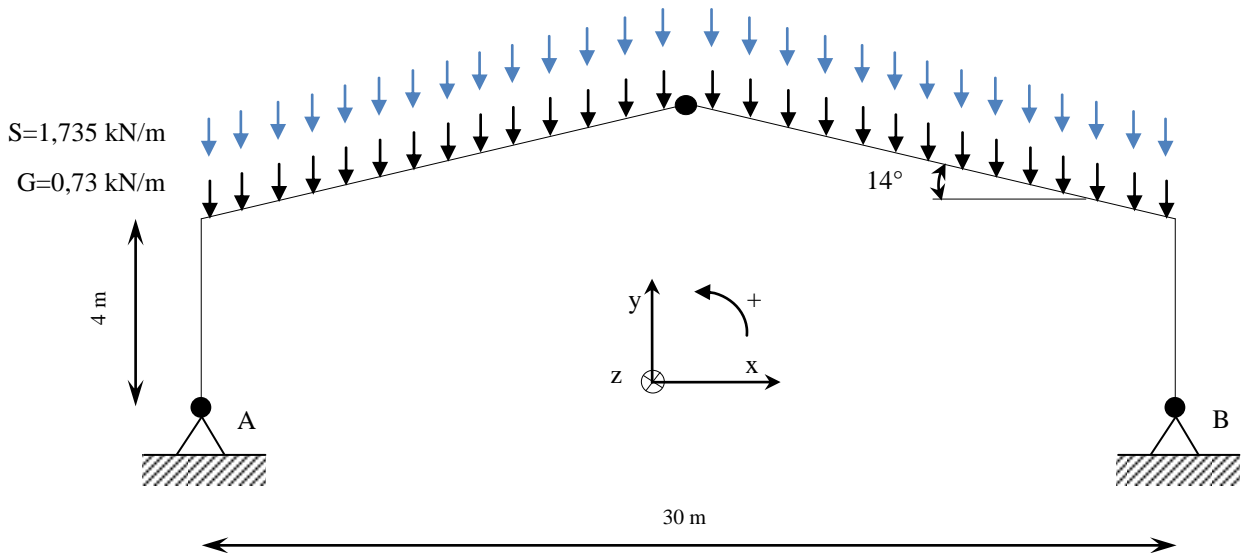


Figure B36 : Modélisation de la structure.

Etape 2 : Remplacer les liaisons par les efforts inconnus.

Les efforts inconnus sont placés en fonction de la nature des liaisons et toujours dans le sens positif du repère (figure B37).

- Au point A nous avons une liaison pivot, donc deux inconnues, A_x et A_y .
- Au point B nous avons une liaison pivot, donc deux inconnues, B_x et B_y .
- La charge totale $R = ql = 3,588 \times 30,9 = 110,9 \text{ kN}$

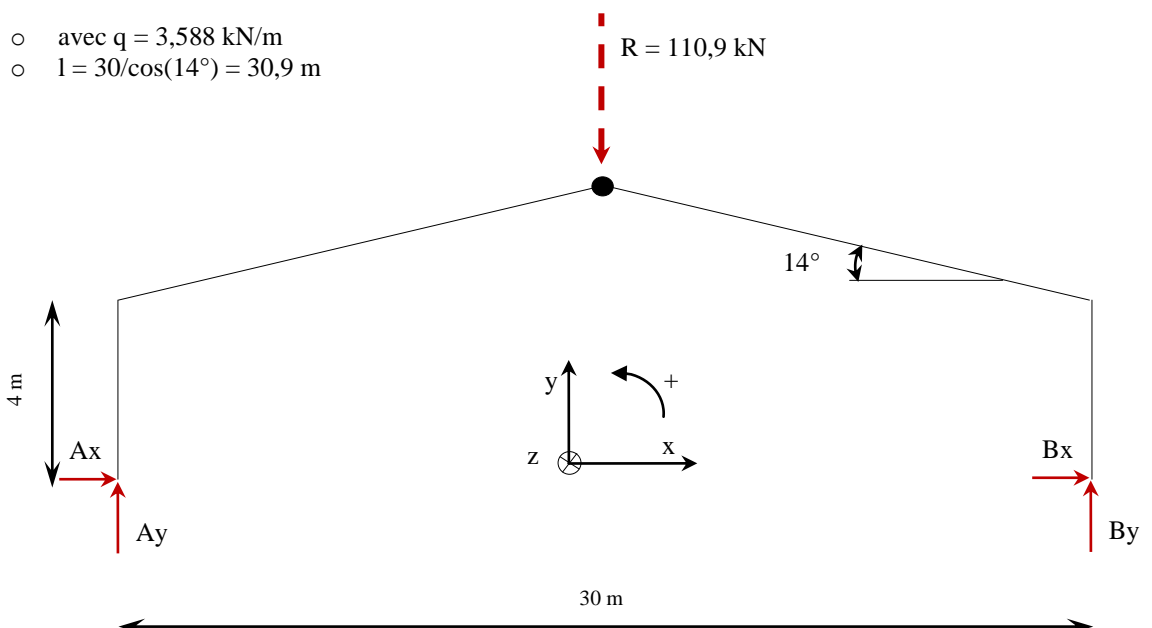


Figure B37 : Réaction aux appuis

Etape 3 : Réaliser le bilan des actions extérieures du portique

Le bilan des actions extérieures est réalisé sous la forme de tableau.

Tableau B4 : bilan des actions extérieures

	A	$R_{G,S}$	B
Axe x	A_x	0	B_x
Axe y	A_y	-110,9 kN	B_y
Moment dans la liaison	0	0	0

Il existe quatre inconnues (A_x , A_y , B_x et B_y), la statique offre 3 équations ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M(\vec{F}) = 0$), l'étude ne peut pas être réalisée.

Etape 4 : isoler un arc

Le système peut être décomposé en deux arcs (figure B38). En appliquant le Principe des Actions Mutuelles (PAM), l'arc de droite reçoit une poussée de l'arc de gauche (C_x) et l'arc de gauche reçoit une poussée de l'arc de droite ($-C_x$). La résultante pour chaque arc est de $110,9/2 = 55,5$ kN.

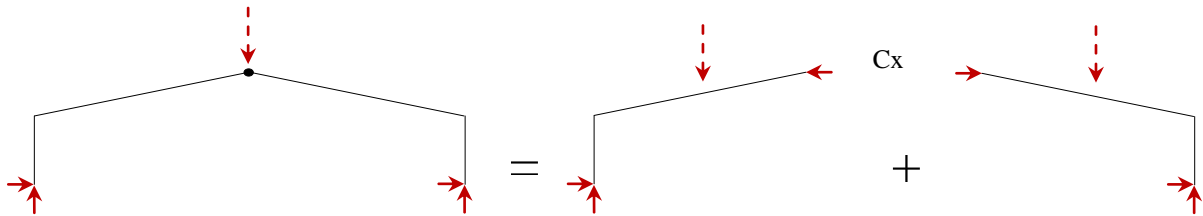


Figure B38 : décomposition du système en deux arcs

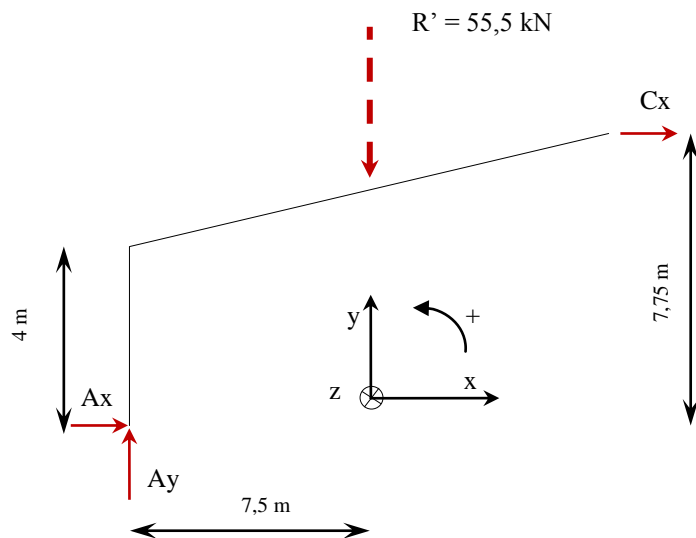


Figure B39 : La force C_x est placée dans le sens positif. Le signe du résultat indiquera le sens de la force

Remarque : Les efforts inconnus sont toujours placés dans le sens positif du repère (figure B39).

Etape 5 : Réaliser le bilan des actions extérieures de l'arc

Le bilan des actions extérieures est réalisé sous la forme de tableau.

Tableau B4 : bilan des actions extérieures

	A	R'_{6,Q}	C
Axe x	A _x	0	C _x
Axe y	A _y	-55,5 kN	0
Moment dans la liaison	0	0	0

Il existe trois inconnues (A_x, A_y et C_x), la statique offre 3 équations ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M(\vec{F}) = 0$), l'étude peut être réalisée.

Etape 6 : Appliquer le Principe Fondamental de la Statique (PFS)

Les deux équations concernant la somme des efforts projetés sur les axes x et y se déduisent directement du tableau du bilan des actions extérieures de l'étape 3.

- $\sum F_x = 0 : A_x + C_x + 0 = 0$
- $\sum F_y = 0 : A_y - 55,5 + 0 = 0$; d'où $A_y = 55,5$ kN

L'équation des moments s'écrit au centre de rotation A (point où il y a le plus d'inconnues)

- $\sum M_i(\vec{F}) = 0 : M_A(\vec{C}) + M_A(\vec{R}) = 0$
 - $-C_x \times 7,75 - 55,5 \times 7,5 = 0$; (figure B39)
 - d'où $C_x = -\frac{55,5 \times 7,5}{7,75} = -53,7$ kN

De l'équation $\sum F_x = 0$; $A_x = 53,7$ kN

Cette étude a permis de définir les réactions aux appuis, $A_x = 53,7$ kN ; $A_y = 55,5$ kN et $C_x = -53,7$ kN

Etape 7 : Définir les efforts dans l'arbalétrier

Isoler l'arbalétrier

La première phase consiste à isoler l'arbalétrier.

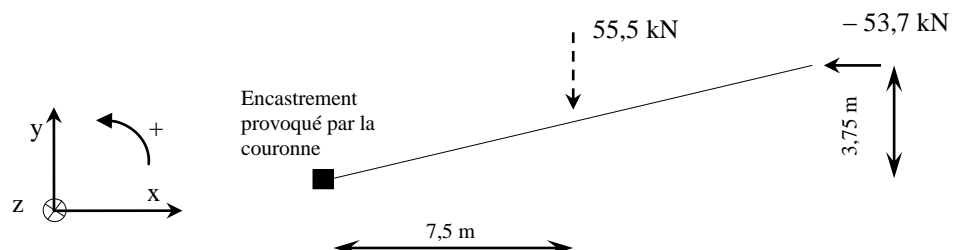


Figure B40 : Arbalétrier isolé

Remplacer les liaisons par les efforts inconnus.

Les efforts et moments inconnus sont placés en fonction de la nature de la liaison et toujours dans le sens positif du repère (figure B41). Au point D nous avons une liaison encastrement.

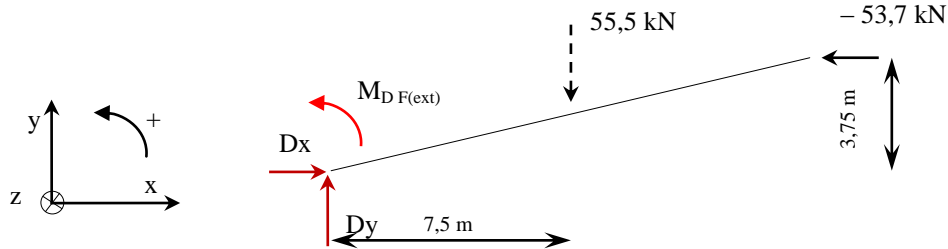


Figure B41 : Efforts et moments au point D

Etape 5 : Réaliser le bilan des actions extérieures de l'arc

Le bilan des actions extérieures est réalisé sous la forme de tableau.

Tableau B5 : bilan des actions extérieures

	D	R'_{G,Q}	C
Axe x	Dx	0	- 53,7 kN
Axe y	Dy	-55,5 kN	0
Moment dans la liaison	M_{D F(ext)}	0	0

Il existe trois inconnues (Dx, Dy et $M_{D F(ext)}$), la statique offre 3 équations ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M \left(\vec{r}_F \right) = 0$), l'étude peut être réalisée.

Appliquer le Principe Fondamental de la Statique (PFS)

Les deux équations concernant la somme des efforts projetés sur les axes x et y se déduisent directement du tableau du bilan des actions extérieures.

- $\sum F_x = 0$: $Dx - 53,7 + 0 = 0$; d'où $Dx = 53,7$ kN
- $\sum F_y = 0$: $Dy - 55,5 + 0 = 0$; d'où $Dy = 55,5$ kN

L'équation des moments s'écrit au centre de rotation D (point où il y a le plus d'inconnues)

- $\sum M_i \left(\vec{r}_F \right) = 0$: $M_D + M_D \left(\vec{r}_{F(ext)} \right) = 0$
 - $M_D - 55,5 \times 7,5 + 53,7 \times 3,75 = 0$; (figure B41)
 - d'où $M_D = 214,9$ kN.m

Cette étude a permis de définir les réactions aux appuis, $Dx = 53,7$ kN ; $Dy = 55,5$ kN et $M_D = 214,9$ kN.m

Etape 8 : Définir les efforts dans le poteau

Isoler Le poteau.

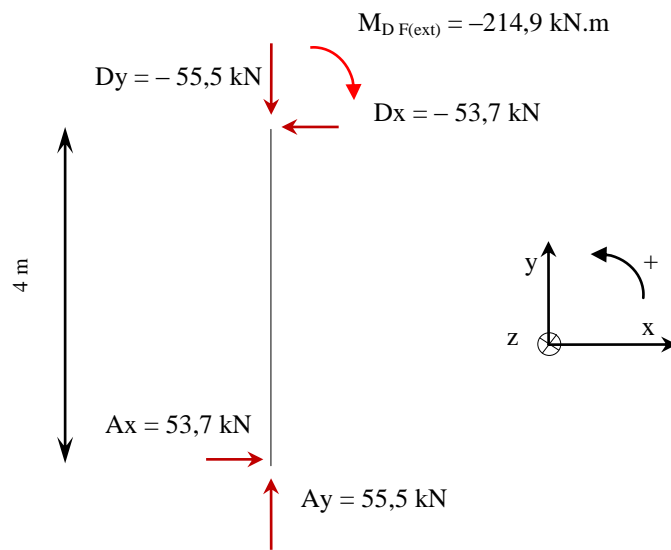


Figure B41 : Poteau isolé.

Remarque : Attention, il faut appliquer le principe des actions mutuelles (PAM), les signes actions et moments sont inversés.

En reprenant les efforts au point A nous obtenons l'équilibre du système :

- $\sum F_x = 0 : 53,7 - 53,7 = 0 ;$
- $\sum F_y = 0 : 55,5 - 55,5 + 0 = 0 ;$
 - $\sum M_i \left(\overset{\curvearrowright}{F} \right) = 0 : -214,9 + 53,7 \times 4 = 0$